

第1讲 二次函数区间最值问题（加油站）

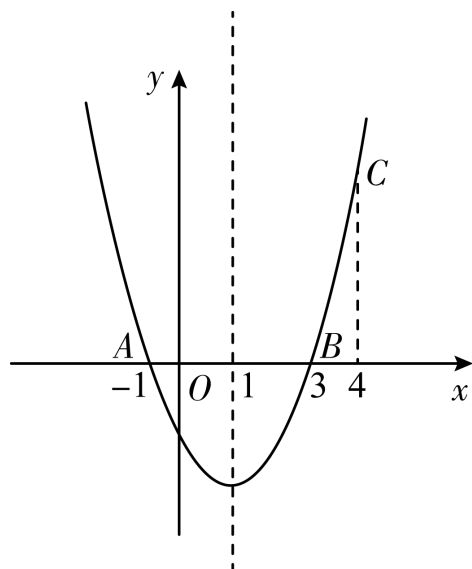
一、定轴定区间

练习1

1. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$ 、点 $B(3, 0)$ 、点 $C(4, y_1)$ ，若点 $D(x_2, y_2)$ 是抛物线上任意一点，有下列结论：

- ①二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的最小值为 $-4a$ ；
- ②若 $-1 \leq x_2 \leq 4$ ，则 $0 \leq y_2 \leq 5a$ ；
- ③若 $y_2 > y_1$ ，则 $x_2 > 4$ ；
- ④一元二次方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的两个根为 -1 和 $\frac{1}{3}$

其中正确结论的个数是()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

练习2

2. 抛物线 $y = x^2 - 5x$ ，当 $0 \leq x \leq 3$ 时，对应的 y 的取值范围是_____。

3. 已知函数 $y = -2x^2 - 4x + 7$ ，根据下列 x 的范围求函数的最值．

① $-3 \leq x \leq 0$ ；② $-2 \leq x \leq 2$ ；③ $0 \leq x \leq 4$ ；④ $-3 \leq x \leq -0.5$ ；⑤ $m \leq x \leq m + 1$ （ m 是实数）．

练习3

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A 在抛物线 $y = x^2 + bx + c$ （ $b > 0$ ）上，且 $A(1, -1)$ ．

（1）若 $b - c = 4$ ，求 b ， c 的值．

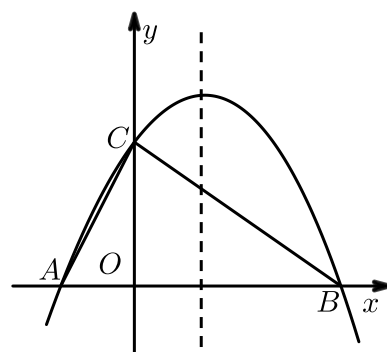
（2）若该抛物线与 y 轴交于点 B ，其对称轴与 x 轴交于点 C ，试求出 OB ， OC 的数量关系．

（3）将该抛物线平移，平移后的抛物线仍经过 $(1, -1)$ ，点 A 的对应点 $A_1(1 - m, 2b - 1)$ ，当 $m \geq -\frac{3}{2}$ 时，求平移后抛物线的顶点所能达到的最高点的坐标．

二、定轴动区间

练习4

5. 当 $a \leq x \leq a+1$ 时, 函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的最小值为 4, 则 a 的值为 ().
A. -2 B. 4 C. 4或3 D. -2或3
6. 当 $a-1 \leq x \leq a$ 时, 函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的最小值为 1, 则 a 的值为 ____ .
7. 若函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 在 $a \leq x \leq a+2$ 时的最小值为 4, 则 a 的值是多少?
8. 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 、点 B , 与 y 轴交于点 C , 抛物线的对称轴是直线 $x = 1$, 连接 BC 、 AC .



- (1) 求 $S_{\triangle ABC}$ (用含有 a 的代数式来表示).
- (2) 若 $S_{\triangle ABC} = 6$, 求抛物线的解析式.
- (3) 在 (2) 的条件下, 当 $-1 \leq x \leq m+1$ 时, y 的最大值是 2, 求 m 的值.

练习5

9. 若函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}$ 在 $a \leq x \leq b$ 范围内的最小值为 $2a$ ，最大值为 $2b$ 。求 a 、 b 的值。

10. 已知函数 $y = x^2 + x - 1$ ，当 $m \leq x \leq m + 2$ 时， $-\frac{5}{4} \leq y \leq 1$ ，则 m 的取值范围是 ()。

A. $m \geq -2$ B. $-2 \leq m \leq -1$ C. $-2 \leq m \leq -\frac{1}{2}$ D. $m \leq -1$

独步天下练习1

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + a - 4 (a \neq 0)$ 的对称轴是直线 $x = 1$ 。

(1) 求抛物线 $y = ax^2 + bx + a - 4 (a \neq 0)$ 的顶点坐标。

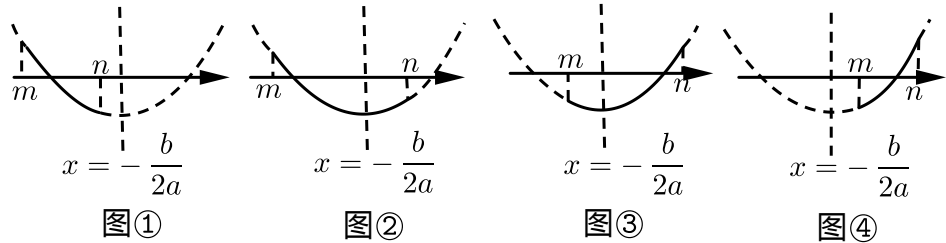
(2) 当 $-2 \leq x \leq 3$ 时， y 的最大值是 5，求 a 的值。

(3) 在(2)的条件下，当 $t \leq x \leq t + 1$ 时， y 的最大值是 m ，最小值是 n ，且 $m - n = 3$ ，求 t 的值。

12. 阅读下面材料：

对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ ，当 $m \leq x \leq n$ 时，二次函数在何处取得最值？对此，我们可做如下探究：

当 $a > 0$ 时，观察图①到图④：



- (1) 由图①可知，当 $x = n$ 时取最小值，当 $x = m$ 时取最大值，点离对称轴越近，函数值越小；
- (2) 由图②、图③可知，当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时取最小值，点离对称轴越近，函数值越小；
- (3) 由图④可知，当 $x = m$ 时取最小值，当 $x = n$ 时取最大值，点离对称轴越近，函数值越小。

结论：

1. 当抛物线开口向上时，抛物线上的点，离对称轴越近，其对应的函数值越小。
2. 若对称轴在自变量的取值范围内，则二次函数在 $x = -\frac{b}{2a}$ 时取最小值。
3. 若对称轴不在自变量的取值范围内，则二次函数在离对称轴最近的点处取得最小值。

请结合以上结论，解决下列问题：

- (1) 已知二次函数 $y = x^2 - 2x - 2$ ，当 $-3 \leq x \leq 2$ 时，此时函数的最大值和最小值。
- (2) 已知二次函数 $y = x^2 - 2x - 2$ 在 $m \leq x \leq m + 1$ 的范围内有最小值 $2m$ ，求出 m 的值。
- (3) 二次函数 $y = x^2 - 2x - 2$ ，当 $m \leq x \leq n$ 时， $m \leq y \leq n (m \neq n)$ ，求出此时的 m, n 的值。

三、动轴定区间

练习6

13. 已知二次函数 $y = -(x - h)^2$ (h 为常数), 当自变量 x 的值满足 $2 \leq x \leq 5$ 时, 与其对应的函数值 y 的最大值为 -1 , 则 h 的值为().

- A. 3或6 B. 1或6 C. 1或3 D. 4或6

14. 当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, 二次函数 $y = x^2 - 2mx + 2m^2 + 1$ 有最小值4, 求实数 m 的值.

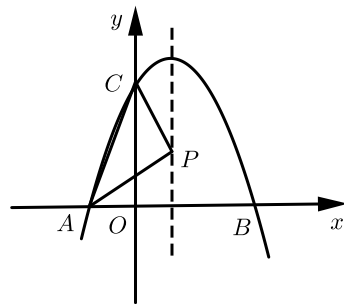
15. 已知函数 $y = ax^2 + (2a - 1)x - 3$ ($a \neq 0$), 当 $-\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 时, y 的最大值为1, 求实数 a 的值.

16. 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + 2 - b$, 在自变量 x 的值满足 $-1 \leq x \leq 2$ 的情况下, 函数有最大值 m , 则 m 的最小值是 ____ .

17. 已知函数 $y = x^2 + bx + 3b$ (b 为常数) 的图象不经过第三象限, 当 $-6 \leq x \leq 2$ 时, 函数的最大值与最小值之差为25, 求 b 的值是 ____ .

独步天下练习2

18. 如图, 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$.



- (1) 求抛物线的解析式和顶点坐标.
- (2) 点 P 是抛物线对称轴上的一个动点, 当 $\triangle PAC$ 周长最小时, 求点 P 的坐标.
- (3) 将抛物线沿 x 轴平移 h ($h > 0$) 个单位, 平移后的抛物线满足: 当 $1 \leq x \leq 3$ 时, y 有最大值是 2, 求 h 的值.

四、动轴动区间

练习7

19. 已知二次函数 $y = x^2 + bx + b^2$, 当 $b \leq x \leq b + 3$ 时, 函数最小值为 21, 则 $b =$ _____.
20. 对于题目“二次函数 $y = \frac{3}{4}(x - m)^2 + m$, 当 $2m - 3 \leq x \leq 2m$ 时, y 的最小值是 1, 求 m 的值.”甲的结果是 $m = 1$, 乙的结果是 $m = -2$, 则 ().
- A. 甲的结果正确
 - B. 乙的结果正确
 - C. 甲、乙的结果合在一起不正确
 - D. 甲、乙的结果合在一起才正确

练习8

21. 已知二次函数 $y = x^2 + 2bx + c$ (b, c 为常数) .

- (1) 当 $b = 1, c = -3$ 时, 求二次函数在 $-2 \leq x \leq 2$ 上的最小值 .
- (2) 当 $c = 3$ 时, 求二次函数在 $0 \leq x \leq 4$ 上的最小值 .
- (3) 当 $c = 4b^2$ 时, 若在自变量 x 的值满足 $2b \leq x \leq 2b + 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 的最小值为 21, 求此时二次函数的解析式 .

22. 已知二次函数 $y = x^2 + mx + n$ (m, n 为常数) .

- (1) 若 $m = -2, n = -4$, 求二次函数的最小值 .
- (2) 若 $n = 3$, 该二次函数的图象与直线 $y = 1$ 只有一个公共点, 求 m 的值 .
- (3) 若 $n = m^2$, 且 $3m + 4 < 0$, 当 x 满足 $m \leq x \leq m + 2$ 时, y 有最小值 13, 求此二次函数的解析式 .

23. 定义：将函数 l 的图象绕点 $P(m, 0)$ 旋转 180° ，得到新的函数 l' 的图象，我们称函数 l' 是函数 l 关于点 P 的相关函数．

例如：当 $m = 1$ 时，函数 $y = (x + 1)^2 + 5$ 关于点 $P(1, 0)$ 的相关函数为 $y = -(x - 3)^2 - 5$ ．

(1) 当 $m = 0$ ．

① 一次函数 $y = x - 1$ 关于点 P 的相关函数为 _____ ．

② 点 $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{8}\right)$ 在二次函数 $y = -ax^2 - ax + 1 (a \neq 0)$ 关于点 P 的相关函数的图象上，求 a 的值．

(2) 函数 $y = (x - 1)^2 + 2$ 关于点 P 的相关函数是 $y = -(x + 3)^2 - 2$ ，则 $m =$ _____ ．

(3) 当 $m - 1 \leq x \leq m + 2$ 时，函数 $y = x^2 - mx - \frac{1}{2}m^2$ 关于点 $P(m, 0)$ 的相关函数的最大值为6，求 m 的值．